

Análisis y comparación de definiciones de rectángulo en un problema con GeoGebra

Magali Freyre^{1,2}, Ana María Mántica^{1,3}, Marcela Götte^{1,4}

¹ Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

²magalifreyre@gmail.com, ³ana.mantica@gmail.com, ⁴marcelagotte@gmail.com

Resumen

Se presentan avances de una investigación en la que se estudia la vinculación entre construcciones de rectángulo con GeoGebra, las propiedades empleadas en las mismas y la definición correspondiente. Se trata de una investigación cualitativa interactiva. Los sujetos de estudio son futuras profesoras de matemática. Se expone el análisis de una parte de la entrevista realizada a un grupo mediada por Zoom, la que refiere al análisis y comparación de definiciones de rectángulo. Las estudiantes relacionan las condiciones presentes en una definición con los procedimientos de construcción y herramientas de GeoGebra para determinar que las figuras construidas se corresponden con dicha definición. Emplean diversos criterios, considerando características y pertinencia de las definiciones de acuerdo a los objetivos con las que se utilicen. Además, reflexionan en torno a las condiciones necesarias y suficientes de rectángulo.

Palabras clave: definición de rectángulo; construcciones de rectángulo, propiedades de rectángulo, GeoGebra; futuros profesores

Introducción

Se presentan avances de una investigación en la que se estudia la vinculación entre construcciones de rectángulo con GeoGebra, las propiedades empleadas en las mismas y la definición correspondiente. En una primera instancia, estudiantes avanzadas del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina) construyen con GeoGebra, en parejas, un rectángulo de tres maneras distintas, explicitan las propiedades empleadas y escriben la definición de rectángulo que consideran. Posteriormente, son entrevistadas en grupo por medio de la plataforma Zoom. Durante el desarrollo de la entrevista, se presentan a cada grupo las construcciones realizadas por otra pareja, se solicita que determinen las herramientas de GeoGebra utilizadas y que identifiquen las propiedades empleadas en cada construcción. Seguidamente, se les presenta la definición de rectángulo considerada por el grupo autor de las construcciones y se solicita que determinen si cada una de ellas se corresponden con dicha definición elaborando justificaciones. Finalmente, se presenta la definición de rectángulo dada por ellas y se propone que realicen una comparación entre ambas definiciones. En este trabajo se expone el análisis de una parte de la entrevista a un grupo, la que refiere al análisis y comparación de definiciones.

Marco de referencia

Se expresan a continuación algunos aspectos teóricos que conforman el marco de referencia de este trabajo, en lo que respecta a las características de las definiciones en matemática, la relación entre construcciones de figuras geométricas y las definiciones de conceptos involucrados, el empleo de definiciones por parte de estudiantes y el rol de la geometría dinámica en la interpretación geométrica y la evocación de aspectos conceptuales.

En relación con las definiciones matemáticas, Winicki-Landman (2006) sostiene que es importante que se consideren explícitamente en la formación del profesor de matemática sus características, sus diferencias con otros tipos de definiciones y su papel en el desarrollo de la matemática. Así, destaca la importancia de tener en cuenta “la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático, las consecuencias de esta elección” (p. 528).

Jaime Pastor, Chapa Aguilera y Gutiérrez Rodríguez (1992) analizan definiciones de triángulos y cuadriláteros en libros de texto y detallan ciertos errores o contradicciones

que pueden encontrarse en las mismas. Expresan que ciertos errores en algunos casos pueden generar conflictos que produzcan aprendizajes incorrectos. Además, consideran relevante que los estudiantes reemplacen progresivamente la concepción de las definiciones como lista descriptiva de propiedades para utilizar, por definiciones que contengan propiedades necesarias y suficientes.

Por otra parte, De Villiers (2004) sostiene que es importante que los estudiantes conozcan que cuando se construyen figuras se tiene control solamente sobre algunos aspectos. De esta manera, algunas relaciones resultan sin acciones de su parte, lo que guarda relación con la parte si y la parte entonces de las definiciones. Destaca, además, que en el proceso de seleccionar entre definiciones se aplican algunos criterios, como por ejemplo que permita deducir propiedades con facilidad, o que posibilite construir la figura de manera directa.

Con respecto a las definiciones utilizadas por los estudiantes, Tall (1992) expresa que la elección de las mismas se da de manera fortuita empleando diferentes versiones que consideren apropiadas para distintos ejemplos. En algunos contextos además las definiciones operan como descripciones y es allí donde las pruebas son entendidas como relaciones coherentes entre definiciones que funcionan para describir objetos y para definirlos.

Sánchez y Samper (2017), por su parte, resaltan ciertas posibilidades que permite el trabajo con geometría dinámica. Manifiestan que el hecho de conocer la definición de un objeto matemático no garantiza que éste se comprenda ni que se reconozca la necesidad de las propiedades involucradas. Es necesario que los estudiantes asocien a la percepción de los objetos representados gráficamente un tipo de pensamiento que les permita evocar aspectos conceptuales. Si esto ocurre, se dice que hay discernimiento y es a partir de ese proceso que los estudiantes realizan una verdadera interpretación geométrica de las propiedades de los objetos.

Marco metodológico

Se trata de una investigación cualitativa interactiva (Mc Millan y Schumacher, 2005) dado que se emplean técnicas cara a cara para recoger datos de la gente en escenarios naturales y estudiarlos en profundidad. Es una investigación aplicada en cuanto "se centra en un campo de práctica habitual y se preocupa por el desarrollo y la aplicación del conocimiento obtenido en la investigación sobre dicha práctica" (p.23). Los sujetos de estudio son futuras profesoras de matemática que cuentan con tres asignaturas

referidas a geometría aprobadas. En dichos espacios se trabaja especialmente con GeoGebra en lo que respecta a la formulación y validación de conjeturas a partir del empleo de distintas herramientas.

Se realiza observación no participante, observaciones de campo y entrevistas en profundidad. Se cuenta además con grabaciones de audio y video de las producciones de los estudiantes y los archivos correspondientes (en GeoGebra y en un editor de texto).

Las entrevistas semiestructuradas mediadas por Zoom tienen una duración aproximada de noventa minutos para cada grupo. En las mismas se identifican dos etapas. La primera etapa corresponde al análisis y construcciones de otro grupo. La segunda corresponde al análisis y comparación de definiciones de rectángulo, y es la que se presenta en este trabajo en relación con lo desarrollado por un grupo.

Resultados

Tal como se detalla previamente, en el desarrollo de la entrevista se propone a las estudiantes que determinen las herramientas de GeoGebra empleadas en las construcciones que se presentan. Estas construcciones fueron generadas a partir de la utilización de variadas herramientas de GeoGebra: Recta paralela, Recta perpendicular, Simetría Axial y Circunferencia (centro, punto), entre otras (Figura 1).

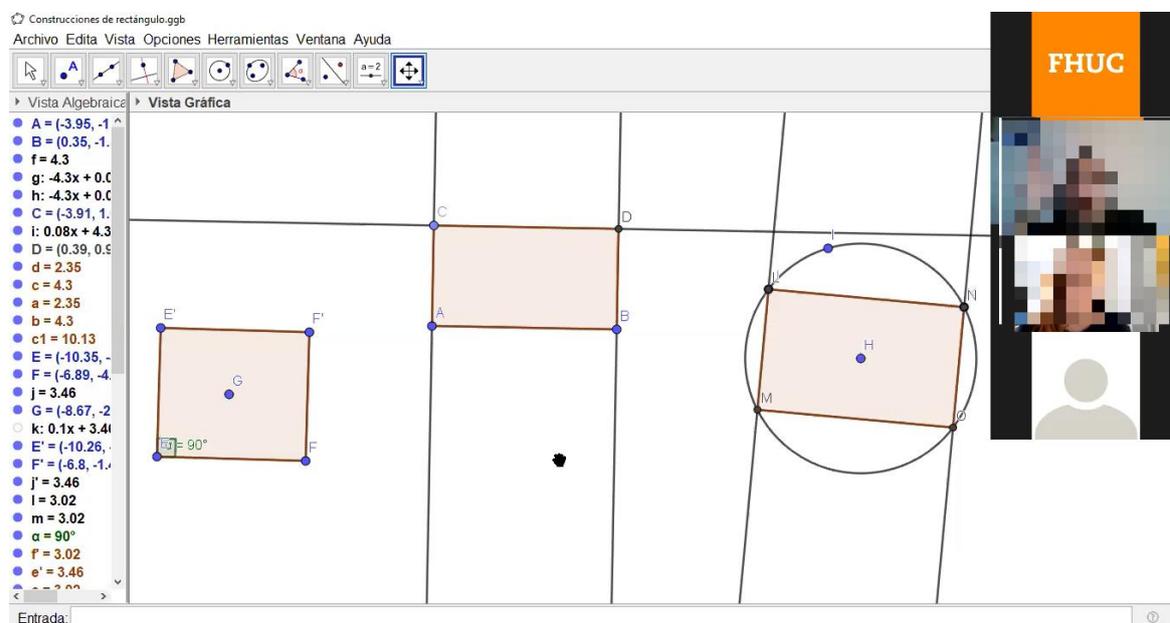


Figura 1. Construcciones de rectángulo analizadas en la entrevista.

Para identificar las herramientas involucradas en las construcciones, las estudiantes observan las construcciones y luego consultan el protocolo de construcción que brinda

el SGD. Esto les permite conocer los procedimientos de construcción y compararlos con los conjeturados a partir de una mera observación de las construcciones.

La entrevista continúa, tal como fue expresado anteriormente, con el análisis y comparación de definiciones de rectángulo, cuestión sobre la que se enfoca especialmente esta comunicación. En esta segunda etapa de la entrevista se presenta a las estudiantes la definición de rectángulo expresada por otro grupo (Figura 2).

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales.

Figura 2. Definición 1 de rectángulo.

Las dos estudiantes manifiestan que las construcciones analizadas previamente en la entrevista se corresponden con la definición presentada.

Una de las estudiantes afirma que se trata de una definición “bien completa” y establece relaciones entre condiciones presentes en la definición y herramientas empleadas en las construcciones. Se refiere a la herramienta Recta perpendicular empleada en las construcciones y su relación con la condición de ángulos rectos presente en la definición. También relaciona la condición de lados opuestos paralelos con la herramienta Recta paralela aplicada. Expresa además que la simetría axial aplicada en una de las construcciones se relaciona con la condición de lados opuestos iguales y aclara que las condiciones de ángulos rectos y de dos pares de lados paralelos también se cumplen en dicha construcción.

Para la comparación entre definiciones, se presenta a las estudiantes la definición presentada por ellas mismas en la actividad previa (Figura 3).

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° .

Figura 3. Definición 2 de rectángulo.

Se genera un debate acerca de la economía de la segunda definición. En la Tabla 1 se expone el diálogo textual, identificando las intervenciones con las iniciales de las estudiantes (M y S) y la letra E para referirse a la entrevistadora.

Tabla 1. Intervenciones textuales de entrevista.

M En la segunda definición te pide solo lados opuestos paralelos y no te pide la igualdad

S Ajá...

M Y bueno, y lo de al menos un ángulo recto, en la otra teníamos todos sus ángulos rectos

S Claro, coinciden en cuanto a que los dos pares de lados opuestos son paralelos, pero no dice que sean iguales en la segunda, y en la primera te pide que sí o sí todos sus ángulos sean rectos y en la otra al menos uno, y ahí podría ser que uno sea que tenga el ángulo de 90

E ¿En la primera?

S En la segunda, ¿Se podría dar el caso que tenga un solo ángulo de 90? porque dice al menos uno, o sea, puede ser uno, dos...

E ¿Definen lo mismo?

S Si, para mí en ambos casos se define el rectángulo, solo que en la segunda como que es más concisa

E ¿Por qué sería más concisa?

S Porque solamente nombra digamos lo mínimo y necesario para que sea un rectángulo, porque si uno nombra que solamente tenga el ángulo de 90 como que no se podría formar el rectángulo y por eso agrega lo de que tiene dos pares de lados opuestos paralelos, como que eso es lo mínimo que uno puede decir en la segunda definición

Seguidamente, tienen lugar algunas interacciones al respecto de qué definición consideran más adecuada. La estudiante S sostiene que, si se trata de una definición solamente, elige la segunda, mientras que si se trata de usar la definición en las construcciones elige la primera. La estudiante M expresa que la segunda es una definición más amplia de rectángulo, porque menciona al menos un ángulo de 90° y no expresa lados iguales. La estudiante S, por el contrario, considera que la primera es más amplia, dado que nombra más propiedades del rectángulo, mientras que la segunda menciona las condiciones mínimas que tiene que cumplir un cuadrilátero para ser rectángulo.

De esta manera, las estudiantes reflexionan en torno a criterios para determinar qué definición es mejor. Identifican la definición que menciona más propiedades y determinan que la segunda definición permite probar de manera más sencilla que una figura construida es un rectángulo, dado que no exige que se pruebe la igualdad de lados opuestos y cuatro ángulos rectos. Además, concluyen que ambas definiciones definen el mismo conjunto de figuras.

Reflexiones

Las estudiantes determinan que las construcciones realizadas se corresponden con las definiciones presentadas. Para esto establecen relaciones con los procedimientos de construcción desarrollados en cada una de ellas, que fueron identificados en una etapa anterior de la entrevista. En línea con lo que plantea De Villiers (2004) se evidencia en este proceso la interrelación que existe entre las construcciones, las propiedades y las definiciones. El software en este caso posibilita que no solo se perciban los dibujos, sino que se evoquen aspectos conceptuales, reconociendo la necesidad de las propiedades involucradas, cuestión destacada por Sánchez y Samper (2017).

Asimismo, reflexionan en torno a las características de las definiciones y a la conveniencia de la mismas (Winicki-Landman, 2006) y determinan que la información de más en la definición 1 corresponde a propiedades del rectángulo. Esto se relaciona en términos de De Villiers (2004) con la parte si-entonces de la definición y puede contribuir especialmente a que no se considere a la definición como una descripción de las propiedades de la figura, hecho que destacan Jaime Pastor et al. (1991) dado que reflexionan en torno a las propiedades necesarias y suficientes de rectángulo.

Las estudiantes coinciden en que ambas definiciones definen lo mismo. Además, tienen en cuenta algunos criterios que les permiten caracterizarlas y compararlas. De Villiers (2004) plantea que se tienen en cuenta distintos criterios para determinar qué definición es más adecuada, y esto se evidencia en el proceso de comparación de definiciones por parte de estas estudiantes. En este caso, no solo debaten en torno a si las definiciones son amplias, completas o concisas sino en relación con lo que posibilita cada definición con mayor facilidad. Reflexionan acerca de cuál es más adecuada si el objetivo de la definición es solo definir, si se utiliza para realizar construcciones o si se aplica para probar que una figura es rectángulo. Esto evidencia la utilización por parte de los estudiantes de distintas definiciones, de acuerdo a su pertinencia en distintos ejemplos, en línea con lo que sostiene Tall (1992).

Resulta interesante en este trabajo que luego de comparar las definiciones en la entrevista, las estudiantes pueden reconocer una definición económica después de reflexionar sobre las características de cada definición, y sobre qué condiciones son no necesarias y cuáles suficientes. Esto puede deberse a que se pide esta comparación al final de la entrevista, luego de haber reflexionado sobre herramientas y propiedades empleadas en cada construcción. Así, después del proceso de análisis de propiedades empleadas pueden determinar correctamente un subconjunto del conjunto de

propiedades del concepto rectángulo desde las cuales todas las otras pueden ser deducidas.

Referencias bibliográficas

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724. Recuperado de: <https://doi.org/10.1080/0020739042000232556>

Jaime Pastor, A., Chapa Aguilera, F. y Gutiérrez Rodríguez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, (23), 49-62.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5° edición. Madrid: Pearson Addison Wesley.

Sánchez, C. y Samper, C. (2017). Geometría dinámica: la diferencia entre percibir y discernir. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 149-154). Universidad Pedagógica Nacional.

Tall, D. (1992). Construction of objects through definition and proof. *PME Working Group on Advanced Mathematical Thinking*.

Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 528-537). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.